UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C
Prof: Jorge Inostroza L - Coordinador.

CALCULO APLICADO
PRUEBA PAS 2009

(Solución)

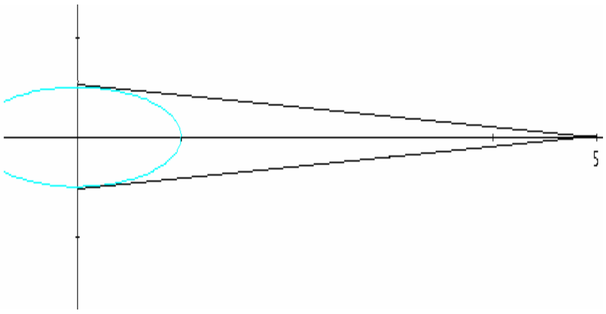
1.- a) $\frac{dy}{dx} \Rightarrow 3x^2 + 3y + 3xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x^2 + y}{x + y^2}$

$$y'' = -\frac{(2x + y')(x + y^2) - (x^2 + y)(1 + 2yy')}{(x + y^2)}$$

Luego se debe reemplazar y' en y'' $\Rightarrow y'' = -\frac{xy(6xy - 2 + 2x^3 + 2y^3 - x)}{(x + y^2)^2}$

b) Recta tangente $y - y_0 = y_0'(x_0)(x - x_0)$;

o por desdoblamiento $xx_0 + 4yy_0 = 1$



$$2x_0 + 8y_i y' = 0 \Rightarrow y_0' = -\frac{x_0}{4y_0}$$

$y - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(x - x_0)$, pero (5,0) esta en ella

$-y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(5 - x_0) \Rightarrow -4y_0^2 - x_0^2 = -5x_0 : (x_0, y_0)$ esta en la elipse

$$-1 = -5x_0 \Rightarrow x_0 = \tfrac{1}{5} \Rightarrow (\tfrac{1}{5})^2 + 4y_0^2 = 1 \Rightarrow y_0 = \left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{25}}\right]^{1/2}$$

$$y_0 = \pm\frac{\sqrt{6}}{5} \Rightarrow y - y_0 = y_0'(x - x_0) \Leftrightarrow \left(y \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{1}{\pm 4\sqrt{6}}(x - 1/5)$$

$$4\sqrt{6}\left(y \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\right) = -\left(x - 1/5\right) \Rightarrow 20\sqrt{6}\left(y \pm \sqrt{6}/5\right) = -(5x - 1)$$

$$4\sqrt{6}(5y \pm \sqrt{6}) = -(5x - 1)$$

O también desdoblando la ecuación:

$xx_0 + 4yy_0 = 1$ como (5,0) esta en ella

$5x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 1/5$: Pero $x_0^2 + 4y_0^2 = 1 \Rightarrow 1/25 + 4y_0^2 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}\left(1 - 1/25\right)^{1/2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{5}$

$y_0 = \pm\frac{\sqrt{6}}{5}; \frac{1}{5}x \pm 4\frac{\sqrt{6}}{5}y = 1$

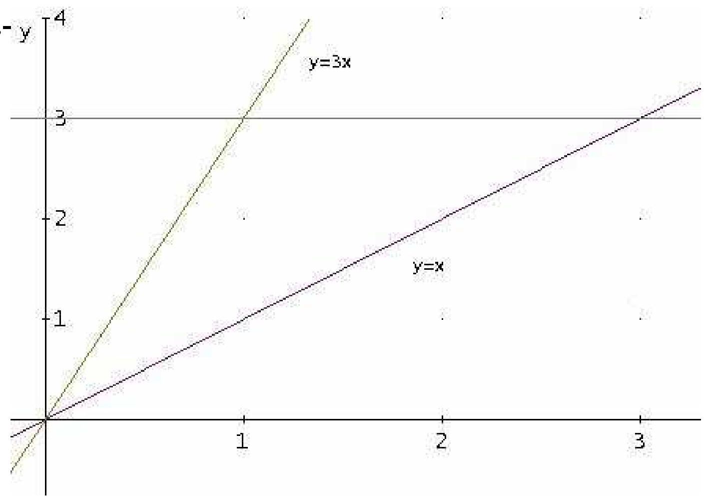
2.- $f'(t) = \frac{(1+t^2) - 2t(1+t)}{(1+t^2)^2} > 0 \Rightarrow 1 - 2t - t^2 > 0 : t^2 + 2t - 1 > 0$, si t esta entre las raices

$t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -1 - \sqrt{2} \quad r_2 = -1 + \sqrt{2}$

Luego $f(t) \nearrow$ si $t \in (-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2})$ y $f(t) \searrow$ si $t \in (-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, \infty)$

$\therefore -1-\sqrt{2}$,punto de mínimo y $-1+\sqrt{2}$ punto de máximo por el cambio de monotonías para función continua.

3.-



A= $\int_0^3 \left(y - \frac{y}{3}\right) dy = \int_0^3 \frac{2y}{3} dy = \left.\frac{2y^2}{6}\right|_0^3 = 3$

4.- a) $\int \frac{x+16}{x(x+4)(x-2)} dx = A\int \frac{dx}{x} + B\int \frac{dx}{x+4} + C\int \frac{dx}{x-2}; A = -2; B = \frac{1}{2}; C = \frac{3}{2}$

$$I = -2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+4| + \frac{3}{2}\ln|x-2| + C \Rightarrow I = \ln \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{3}{2}}}{x^2} + C$$

b) $\frac{d}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{(x-a)}{2}\frac{2a-2x}{2\sqrt{2ax-x^2}} + \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}}\frac{1}{a}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2ax - x^2} - \frac{2(x-a)^2}{4\sqrt{2ax-x^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= \frac{2ax - x^2}{2\sqrt{2ax-x^2}} - \frac{x^2 - 2ax + a^2 - a^2}{2\sqrt{2ax-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{2} + \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{2} = \sqrt{2ax-x^2}$$