Coordinación de Cálculo Aplicado.-

Control # 5.- 15/06/2007.-

Nombre.____________________________Prof._____________

1.- Para la curva: $y = \frac{x^2}{1-x^2}$ a) Señale monotonías; b) concavidades; c)Asíntotas.

2.- a) Dada la ecuación $x^3+3xy+y^3 = 8$ Calcule y` e y'' en x = 2

b) Si: $x=(e^{2t}Cos^2 t)$ $y=(e^{2t}Sen^2 t)$.Calcule y`(x) e y''(x) ;en t = 0.

3.- Demuestre que el segmento de tangente a la curva: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ entre los dos ejes es constante = a

Solución.

① a) $y' = \frac{2x(1-x^2)+2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow$ a) $y'>0 \Leftrightarrow x>0 \therefore \nearrow$ Creciente

b) $y'<0 \Leftrightarrow x<0 \therefore \searrow$ decreciente

b) $y'' = \frac{2(1-x^2)^2+8x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4} = \frac{2(1-x^2)+8x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3} \therefore$

$y''>0 \Leftrightarrow (1-x^2)>0 \therefore -1<x<1 \Rightarrow$ cóncava hacia arriba

y $|x|>1$ ó $x>1 \vee x<-1 \Rightarrow$ cóncava hacia abajo

c) y(x) es par: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = -1 \therefore$

y = -1 asíntota horizontal

$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{1-x^2} = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{1-x^2} = \infty \therefore$

x = 1 y x = -1 asíntotas verticales.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2} = 0$ = pendiente luego no hay asíntota oblicua..

② Derivación implícita: $3x^2+3y+3xy'+3y^2y' = 0 \therefore y' = -\frac{x^2+y}{x+y^2}$

a) Si $x=2 \Rightarrow 8+6y+y^3=8 \Rightarrow y(6+y^2)=0 \therefore y=0$;

$y'(2) = -\frac{4}{2} = -2$

$x^2+y+xy'+y^2y'=0 \,/\frac{d}{dx} \Rightarrow 2x+y'+y'+xy''+2yy'^2+y^2y''=0$

$y'' = -\frac{2x+2y'+2yy'^2}{x+y^2}$; $y''(2) = -\frac{4-4}{2} = 0$

b) $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$; $y''(x)\cdot x'(t) = \frac{y''(t)\cdot x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'^2(t)} \therefore$

$y''(x) = \frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}$

b) $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$; $y''(x) = \dfrac{y''(t)\,x'(t) - y'(t)\,x''(t)}{x'^{3}(t)}$.

$x'(t) = e^{2t}\left(2\cos^2 t - 2\sin t\cos t\right)_{t=0} = 2$ //

$y'(t) = e^{2t}\left(2\sin^2 t + 2\sin t\cos t\right)_{t=0} = 0$ //

$x'' = e^{2t}\left(4\cos^2 t - 4\sin t\cos t + 2\sin^2 t - 2\cos^2 t\right)$

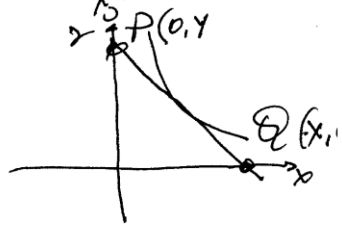
$x'' = e^{2t}\left(2 - 4\sin t\cos t\right)_{t=0} = 2$ /

$y'' = e^{2t}\left(4\sin^2 t + 4\sin t\cos t - 2\sin^2 t + 2\cos^2 t\right)$

$y'' = e^{2t}\left(2 + 4\sin t\cos t\right)_{t=0} = 2$ //

(3) $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ la tangente en cada punto

$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$; $y'(x_0) = -\dfrac{y_0^{1/3}}{x_0^{1/3}}$



∴ $y = y_0 - \dfrac{y_0^{1/3}}{x_0^{1/3}}(x - x_0)$

Si $x = 0 \Rightarrow y = y_0 + \dfrac{y_0^{1/3}}{x_0^{1/3}}x_0$

Si $y = 0 \Rightarrow y_0 = \dfrac{y_0^{1/3}}{x_0^{1/3}}(x - x_0)$

$y_0 + x_0\left(\dfrac{y_0^{1/3}}{x_0^{1/3}}\right) = x\cdot\dfrac{y_0^{1/3}}{x_0^{1/3}}$ ∴ $x = y_0\dfrac{x_0^{1/3}}{y_0^{1/3}} + x_0$

$P\left(0, \dfrac{y_0x_0^{1/3} + x_0y_0^{1/3}}{x_0^{1/3}}\right)$

$Q\left(\dfrac{y_0x_0^{1/3} + x_0y_0^{1/3}}{y_0^{1/3}}, 0\right)$ la magnitud del trozo será

$$\sqrt{\dfrac{\left(y_0x_0^{1/3} + x_0y_0^{1/3}\right)^2}{x_0^{2/3}} + \dfrac{\left(y_0x_0^{1/3} + x_0y_0^{1/3}\right)^2}{y_0^{2/3}}} = \sqrt{\dfrac{\left(y_0^{1/3}\cancel{x_0^{1/3}}\right)^2\left(y_0^{2/3} + x_0^{2/3}\right)^2}{\cancel{x_0^{2/3}}} + \dfrac{\left(\cancel{y_0^{1/3}}x_0^{1/3}\right)^2\left(y_0^{2/3} + x_0^{2/3}\right)^2}{\cancel{y_0^{2/3}}}}$$

$$= \sqrt{y_0^{2/3}\left(y_0^{2/3} + x_0^{2/3}\right)^2 + x_0^{2/3}\left(y_0^{2/3} + x_0^{2/3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{y_0^{2/3}\left(a^{4/3}\right) + x_0^{2/3}\left(a^{4/3}\right)} = a^{2/3}\sqrt{y_0^{2/3} + x_0^{2/3}} = a^{2/3}\cdot a^{1/3} = a$$ //