Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
DMCC

Tercera prueba parcial
Cálculo Aplicado Fila A

Santiago, 10 de enero de 2012

1) Hallar el área de la región determinada por los gráficos de
$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$; $y = g(x) = \frac{1}{3}x$

2) Un cable se cuelga de dos postes de igual altura, distantes entre si por 20 metros. Si el cable adopta la forma de una catenaria cuya ecuación viene dada por $y = 5(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}})$;$-10 \le x \le 10$ ¿Cual es la longitud del cable?

3) Decida la convergencia de:
a) $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$ b) $\int_{0}^{\infty} \frac{2x}{(4x^2+3)^3}dx$

4) Calcule el volumen del sólido que se genera cuando la región limitada por las curvas de ecuación $y^2 = x$; $y = x^3$ gira, alrededor de la recta $y = -1$

Cada tema se evalúa con un máximo de 1,5 puntos

Resolución

1) Debemos determinar los puntos de intersección de las curvas, para ello resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x^3 - x \\ y = \dfrac{1}{3}x \end{cases}$

Los puntos de intersección son $P(0,0)$; $Q(-2,-\frac{2}{3})$; $R(2,\frac{2}{3})$

Se producen dos intervalos, $(-2,0)$ y $(0,2)$ donde decidir la función mayorante

Si $x \in (-2,0)$ entonces $f(x) > g(x)$ de donde $A_1 = \int \left[(\frac{1}{3}x^3 - x) - \frac{1}{3}x \right] dx$

Si $x \in (0,2)$ entonces $g(x) > f(x)$ de donde $A_2 = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}x - (\frac{1}{3}x^3 - x) \right] dx$

Finalmente, el área A entre las curvas es $A = A_1 + A_2$

2) Como $y = f(x) = 5(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}})$ y $f'(x) = 5(\frac{1}{10}e^{\frac{x}{10}} - \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}})$ entonces la longitud L pedida es $L = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{x}{10}} - e^{-\frac{x}{10}}}{2} \right)^2}\, dx$

$$L = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{x}{10}} - e^{-\frac{x}{10}}}{2} \right)^2}\, dx = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \frac{(e^{\frac{x}{10}})^2 - 2 + (e^{-\frac{x}{10}})^2}{4}} dx =$$

$$\int_{-10}^{10} \sqrt{\frac{4 + (e^{\frac{x}{10}})^2 - 2 + (e^{-\frac{x}{10}})^2}{4}} dx = \frac{1}{2}\int_{-10}^{10} \sqrt{(e^{\frac{x}{10}})^2 + 2 + (e^{-\frac{x}{10}})^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-10}^{10} \sqrt{(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}})^2}\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-10}^{10} (e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}}) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{10}e^{\frac{x}{10}} - \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} \right]_{-10}^{10} = \frac{1}{2}(20e - 20e^{-1}) = 10(e - e^{-1}) = 23{,}504$$

La longitud es 23,504 metros

3 a) $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^{x}(x-1)\right]_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty}\left[e^{0}(0-1)-e^{a}(a-1)\right] = -1$

donde $\lim_{a\to-\infty} e^{a}(a-1) = 0$ usando L Hopital

3 b) $\int_{0}^{\infty}\frac{2x}{(4x^{2}+3)^{3}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{2x}{(4x^{2}+3)^{3}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{8(4x^{2}+3)^{2}}\right]_{0}^{b}$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{8(4b^{2}+3)^{2}}+\frac{1}{72}\right] = \frac{1}{72}$$

4) $V = \int_{0}^{1}\pi\left[(1+x^{\frac{1}{2}})^{2}-(1+x^{3})^{2}\right]dx = \frac{25}{21}\pi$